



Zusammenfassung der Vorgehensweise

- ① Festlegen des Unsicherheitstyps (z.B. multipl. Ausgangsunsicherheit).
- ② Bestimmen/Festlegen von Größe $(l(\omega))$ der Unsicherheit Δ .
- ③ M - Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln.
- ④ Δ normieren (bestimme Gewicht $W_\Delta(s)$).
- ⑤ $|W_\Delta(j\omega)M(j\omega)| \leq 1$ für alle $\omega \Leftrightarrow$ robust stabil.

Beispiel zur robusten Stabilität



Ziel

Untersuche Auswirkung des Unsicherheitstyps auf den Konservatismus.

Betrachte parametrisierten Regler

$$K(s) = \frac{k}{s} \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

Zulässige Reglerverstärkung für

- a) Additive Unsicherheit.
- b) Multiplikative Unsicherheit.
- c) Reale Strecke (kein Konservatismus).



Beispiel aus Einführungsvorlesung

$$\text{Reale Strecke } G_{real}(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{(0.1s+1)^2}$$

$$\text{Nominelle Strecke } G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Motivation

Für Reglerentwurf nominelle Strecke und Gewichte W_Δ niedriger Ordnung sinnvoll.

Schätze hochfrequente Dynamik in G_{real} durch Unsicherheit mit konstantem Gewicht W_Δ ab.

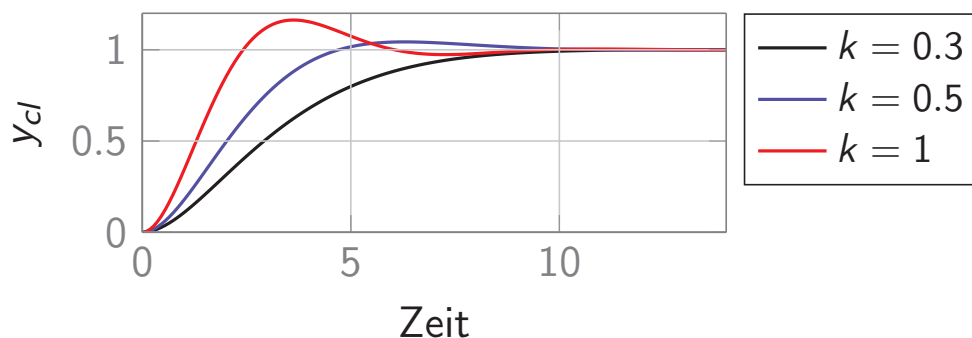
Nominelle Stabilität



Nomineller geschlossener Kreis

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{k}{s^2 + s + k} \text{ asy. stabil für } k > 0.$$

Sprungantwort



Gute Sprungantwort für $k \approx 0.5$.

Nomineller geschlossener Kreis asymptotisch stabil für $k > 0$.
Robuste Stabilität?

a) Additive Unsicherheit 1

1 Festlegen des Unsicherheitstyps:

additive Unsicherheit: $G_{\Delta}(s) = G(s) + \Delta_A(s)$

2 Größe der Unsicherheit:

$$I_A(\omega) = |\Delta_A(j\omega)| \text{ mit } \Delta_A(s) = -\frac{s}{s+1} \frac{s+20}{(s+10)^2}$$

Anmerkung

Im Beispiel: Reale Strecke als bekannt angenommen.

Im Allgemeinen: Reale Strecke durch Menge von Systemen beschrieben (z.B. unbekannte Parameter) $\Rightarrow \Delta_A$ ist Menge von Übertragungsfunktionen.

3 M- Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln:

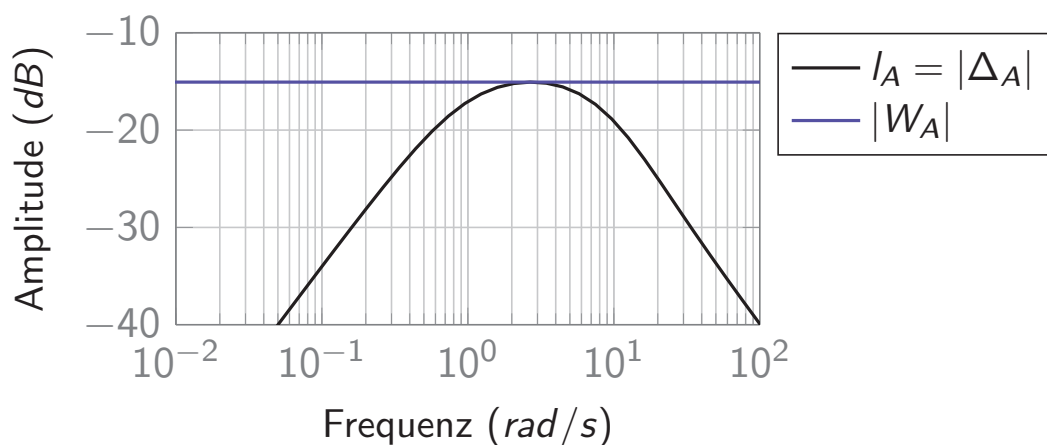
$$\dots \Rightarrow M_A(s) = -K(s)S(s)$$

a) Additive Unsicherheit 2

4 Δ normieren:

Finde stabiles, minimalphasiges System W_A mit $|W_A(j\omega)| > I_A(\omega)$.

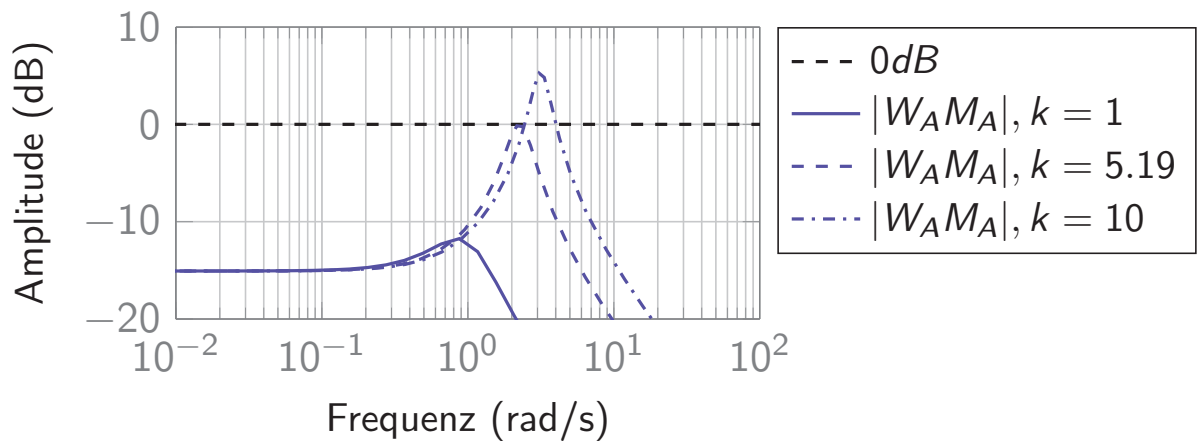
konstantes Gewicht $\Rightarrow W_A(s) = \max_{\omega} I_A(\omega)$



$$W_A(s) = 0.1764$$

a) Additive Unsicherheit 3

- ⑤ $|W_A(j\omega)M_A(j\omega)| \leq 1$ für alle $\omega \Leftrightarrow$ robust stabil:



$W_A(s)M_A(s) = -0.1764k \frac{s+1}{s^2+s+k}$ asymptotisch stabil für $k > 0$.

Für $k < 0$ Theorem über robuste Stabilität nicht anwendbar, da $W_A M_A$ instabil.

⇒ Bei additiver Unsicherheit robust stabil für $0 \leq k \leq k_A \approx 5.19$.

b) Multiplikative Unsicherheit 1

- ① Festlegen des Unsicherheitstyps:

multipl. Unsicherheit: $G_\Delta(s) = G(s)(1 + \Delta_M(s))$

- ② Größe der Unsicherheit:

$l_M(\omega) = |\Delta_M(j\omega)|$ mit $\Delta_M(s) = G_\Delta(s)/G(s) - 1 = -\frac{s(s+20)}{(s+10)^2}$

- ③ M - Δ -Struktur aufstellen und M ermitteln:

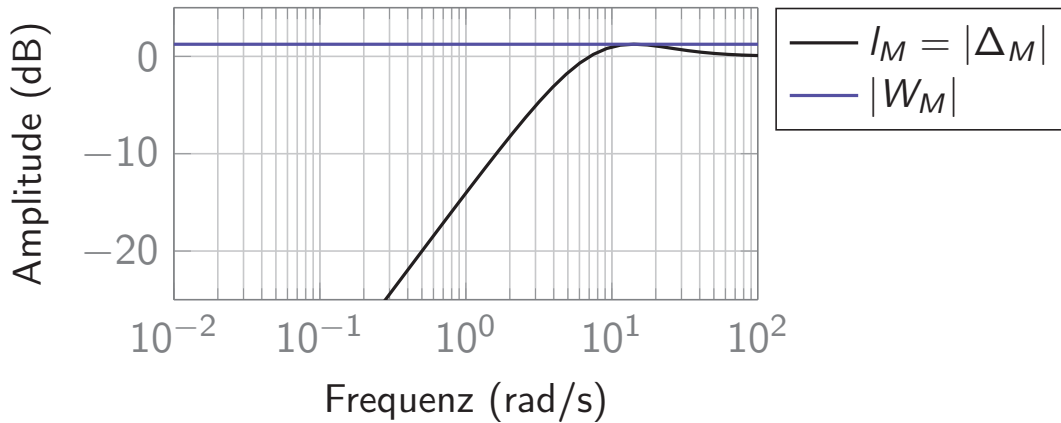
... ⇒ $M_M(s) = -T(s)$

b) Multiplikative Unsicherheit 2

4 Δ normieren:

Finde stabiles, minimalphasiges System W_M mit $|W_M(j\omega)| > I_M(\omega)$.

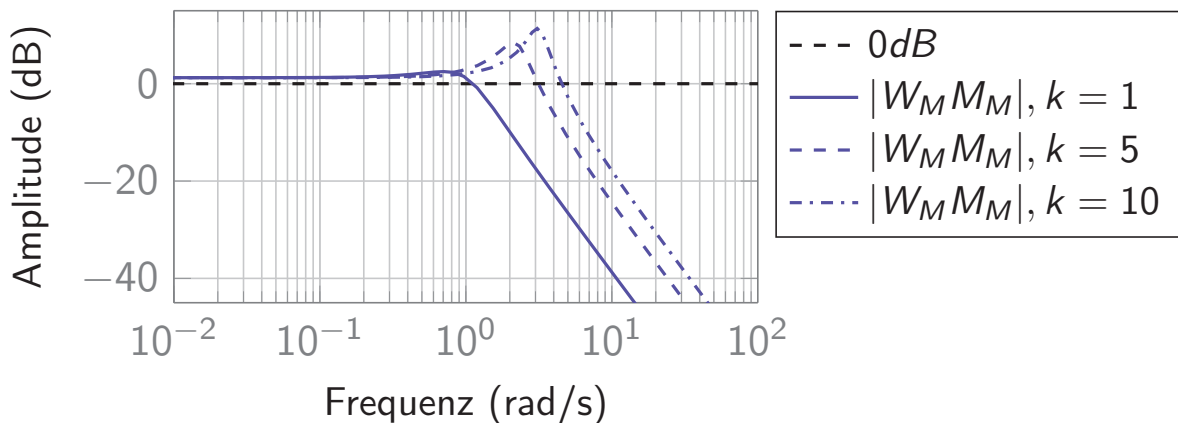
konstantes Gewicht $\Rightarrow W_M(s) = \max_{\omega} I_M(\omega)$



$$W_M(s) = 1.154$$

b) Multiplikative Unsicherheit 3

5 $|W_M(j\omega)M_M(j\omega)| \leq 1$ für alle $\omega \Leftrightarrow$ robust stabil:



$W_M(s)M_M(s) = -1.154k \frac{1}{s^2 + s + k}$ asympt. stabil für $k > 0$.

Für $k < 0$ Theorem über robuste Stabilität nicht anwendbar, da $W_M M_M$ instabil.

$\Rightarrow$ Bei multiplikativer Unsicherheit **nicht** robust stabil für $0 \leq k$.

Mit Gewicht der Ordnung 1 robuste Stabilität für multiplikative Unsicherheiten und k vergleichbar zu additiver Unsicherheit.

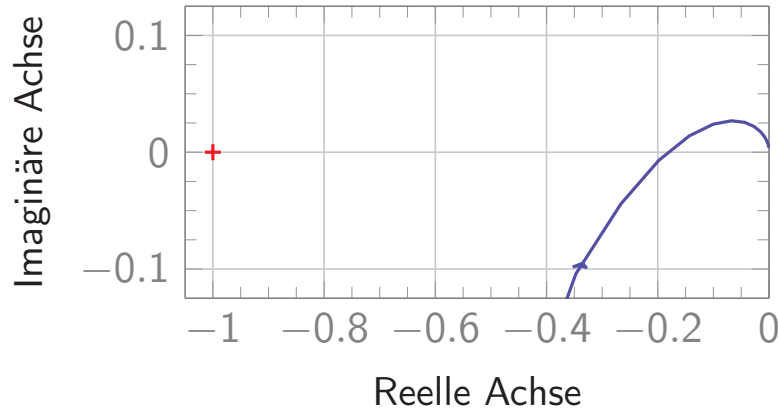
c) Keine Unsicherheit ($G(s) = G_{real}(s)$)



Offene Kreis

$$L(s) = G_{real}(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.1s+1)^2}$$

Nyquist Ortskurve von L für $k = 1$



Für $k \geq 0$ Phasendrehung von $\pi/2$.

Für $k < 0$ Phasendrehung von $-\pi/2$.

⇒ Geschlossener Kreis stabil für $0 \leq k < 5.55$.

Zusammenfassung



Maximale Reglerverstärkung

- ① Additive Unsicherheit: $0 \leq k \leq k_A \approx 5.19$
- ② Multiplikative Unsicherheit: keine robuste Stabilität für $0 \leq k$
- ③ Keine Unsicherheit: $0 \leq k < 5.55$

Additive Unsicherheit in diesem Beispiel wenig konservativ.

Multiplikative Unsicherheit

Für $k \geq 0$ gibt es ein $\Delta(s)$ mit $|\Delta(j\omega)| < |W_M(j\omega)|$, so dass geschlossener Kreis instabil.

Aber:

Geschlossener Kreis aus G_{real} und K stabil für $0 < k < 5.55$.

Multiplikative Unsicherheit hier konservativ für konstantes Gewicht.

Wahl des Unsicherheitstyps wichtig für Robustheitsuntersuchungen.